Université Paris-Sud, DEUG Cumulatifs C3A

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES, PREMIÈRE SESSION

6 juin 1997

Durée : 3 heures

*Les exercices sont indépendants. Le dernier est réservé au étudiants de la filière MP.*

## I

*Dans cet exercice, on utilise l'algèbre linéaire pour étudier la composition des développements limités.*

Fixons un entier entier $n \geq 1$. On note $E_n$ l'espace vectoriel réel des polynômes en une variable, de degré inférieur ou égal à $n$, qui s'annulent en 0. Etant donné $Q \in E_n$, on note $f_Q$ l'application qui à un polynôme $P \in E_n$ associe la partie régulière du développement limité à l'ordre $n$ en 0 de la fonction composée $P \circ Q$, i.e. $P(Q(x)) = f_Q(P)(x) + o(x^n)$.

**1.** Montrer que $(X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $E_n$, qu'on appelera *base naturelle* de $E_n$.

**2.** On suppose $n = 3$. Posant $Q(X) = a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, vérifier que la matrice de $f_Q$ dans la base naturelle de $E_3$ est $M_Q = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & {a_1}^2 & 0 \\ a_3 & 2a_1a_2 & {a_1}^3 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs propres de $f_Q$ ? Quel est le déterminant de $f_Q$ ?

**3.** Dans le cas particulier $n = 3$, $Q(X) = 2X + X^2$, calculer une base de vecteurs propres de $f_Q$. Lorsque $n = 3$ et $Q(X) = -X + X^2$, $f_Q$ est-elle diagonalisable ?

**4.** On revient à $n$ quelconque. Montrer (sans la calculer) que la matrice de $f_Q$ dans la base naturelle de $E_n$ est triangulaire inférieure. Quelles sont les valeurs propres de $f_Q$ ? Quel est le déterminant de $f_Q$ ? Dans le cas particulier $Q(X) = X^2$, quel est le rang de $f_Q$ ?

**5.** On suppose que $Q'(0) \neq -1$. A quelle condition sur $Q$ l'endomorphisme $f_Q$ est-il diagonalisable ?

**6.** On note $I$ le polynôme $I(X) = X$. A quelle condition l'équation $f_Q(P) = I$ admet-elle une solution ? Montrer que si $f_Q$ est une bijection, il existe $Q' \in E_n$ tel que $(f_Q)^{-1} = f_{Q'}$. Calculer $Q'$ lorsque $n = 3$ et $Q(X) = X + X^2$.

## II

*Dans cet exercice, on démontre une identité relative à la fonction cotangente.*

Soit $z$ un nombre réel qui n'est pas un entier relatif, i.e. $z \notin \mathbf{Z}$. Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que, pour $x \in [-\pi, \pi[$, $f(x) = \cos(xz)$.

**1.** Vérifier que $f$ est continue sur $\mathbf{R}$. Est-elle dérivable ? de classe $C^1$ par morceaux ? Quelle est sa parité ?

**2.** Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

**3.** En utilisant un théorème du cours que l'on énoncera, montrer que $f$ est la somme de sa série de Fourier. En faisant $x = \pi$, en déduire les identités

$$i\pi z\left(1 + \frac{2}{e^{2i\pi z} - 1}\right) = \pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2z^2}{z^2 - k^2}. \qquad (*)$$

## III

*Dans cet exercice, on démontre le développement en série entière*

$$1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2z^2}{z^2-k^2}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)z^{2n}. \qquad (**)$$

Soit $s$ un réel, $s \geq 2$. On rappelle que la série de terme général $\frac{1}{n^s}$ est convergente. On note $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$ sa somme. On note $\zeta_m(s)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^s}$ la somme partielle.

**1.** En utilisant une comparaison avec une intégrale, montrer que

$$\zeta(s)-\zeta_m(s)\leq\int_m^{+\infty}\frac{dt}{t^s}$$

puis que $|\zeta(s)-\zeta_m(s)|\leq 1/m$.

**2.** On note $S(z)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2z^2}{z^2-k^2}$ et $S_m(z)=1+\sum_{k=1}^{m}\frac{2z^2}{z^2-k^2}$ la somme partielle de cette série.

Soit $k$ un entier, $k \geq 1$. Montrer que $\frac{2z^2}{z^2-k^2}$ admet un développement en série entière au voisinage de l'origine. Quel est son rayon de convergence ?

Montrer que la fonction $S_m$ admet un développement en série entière au voisinage de l'origine. Quel est son rayon de convergence ? Exprimer ce développement au moyen de la fonction $\zeta_m$.

**3.** Notons, pour $|z|<1$, $T(z)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)z^{2n}$. En utilisant 1., montrer que $|T(z)-S_m(z)|\leq\frac{z^2}{m(1-z^2)}$. En déduire que si $|z|<1$, $S(z)=T(z)$.

## IV, réservé aux étudiants de la filière MP

*Dans cet exercice, on tire de (*) et de (**) une relation qui permet le calcul de $\zeta(s)$, pour $s$ entier pair.*

On admettra que la fonction $g$ définie sur $\mathbf{C}\setminus 2i\pi\mathbf{Z}$ par $g(w)=\frac{w}{e^w-1}$ admet un développement en série entière au voisinage de l'origine, de la forme $g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nw^n$.

**1.** Que valent $c_0$ et $c_1$ ? Montrer que si $n$ est impair et $n>1$, alors $c_n=0$.

**2.** En utilisant l'identité $(e^w-1)g(w)=w$, écrire une relation qui permet de calculer $c_n$ en fonction de $c_0,\ldots,c_{n-1}$. Calculer $c_2$ et $c_4$.

**3.** En utilisant les formules (*) et (**) des exercices précédents, exprimer $\zeta(2n)$ en fonction de $c_{2n}$. En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail